**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1**

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДНОСНО-ЧАСТОТНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ**

**Основні поняття та визначення**

*Випадковим процесом* називається випадковий дослід або експеримент, при якому можливі різні результати, які неможливо заздалегідь передбачити. Величина *X*, що є результатом випадкового процесу, називається *випадковою величиною*. Непостійність результату такого досліду може бути пов'язана з наявністю випадкових помилок вимірів або зі статистичною природою самої вимірюваної величини (наприклад, процес розпаду радіоактивної речовини). Випадкові величини зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту *X, Y, Z,...,* а їх можливі значення – малими *x, y, z...*

Випадкові величини бувають дискретні і неперервні, одновимірні (залежні від однієї змінної) або багатовимірні (залежні від двох і більше змінних).

*Дискретною випадковою величиною* називається така величина, можливі значення якої рівні одному із значень із скінченої, або нескінченої множини, елементи якої можуть бути пронумеровані.

*Неперервною випадковою величиною* називається така величина, можливі значення якої безперервно заповнюють деякий інтервал (скінченний або нескінченний) числової осі.

Повною характеристикою випадкової величини *Х* з імовірнісної точки зору є її *закон розподілу*, тобто заданий тою чи іншою мірою зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями їх появи.

Загальною формою закону розподілу випадкових величин є *функція розподілу ймовірностей* - це така функція *F*(*x*), значення якої в точці *x* рівне ймовірності того, що при проведенні досліду значення випадкової величини *X* виявиться менше, ніж *x*:

 (1)

Як випливає із визначення, функція розподілу є невід’ємною неспадною функцією, значення якої лежать на відрізку . Мають місце граничні рівності  і . Крім того функція *F*(*x*) для дискретної випадкової величини ступінчата розривна, а для неперервної випадкової величини – неперервна.

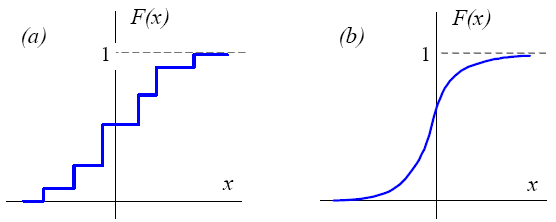


Рис. 1. Графічне зображення функції розподілу ймовірностей:

(а) – для дискретної випадкової величини, (б) – для неперервної випадкової величини.

Похідна від функції розподілу



називається *густиною розподілу ймовірності,* або просто *густиною ймовірності* даної випадкової величини. Очевидно, що:

,

тобто величина  є ймовірністю потрапляння випадкової величини *X* в напівінтервал 

Для неперервної випадкової величини *X* густина ймовірності є неперервною функцією. Для дискретної випадкової величини , що приймає фіксовані значення  з ймовірностями , густина ймовірності виражається сумою дельта-функцій:



В обох випадках густина ймовірності  і задовольняє умову нормування

.

Щоб у стислій формі виразити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілу, використовують особливі числові характеристики випадкової величини, які називають її *моментами n-го порядку*:

.

Зауважимо, що  є не випадковою, а певною, детермінованою величиною.

Однією з важливих характеристик є момент 1-го порядку, який називають *математичним сподіванням* або *середнім значенням* випадкової величини:

.

Момент 2-го порядку



називають *середнім квадратом* випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини , з розподілом , , математичне сподівання і середній квадрат будуть відповідно:

,

.

Іншою важливою характеристикою випадкової величини є *дисперсія*, яка визначається як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини *X* від свого середнього значення:

.

Неважко показати, що має місце рівність:

,

тобто дисперсія є різницею між середнім квадратом випадкової величини *X* і квадратом її середнього значення.

Величина , тобто додатній квадратний корінь з дисперсії називається *стандартним* або *середньоквадратичним відхиленням*. Середньоквадратичне відхилення кількісно показує, наскільки сильно значення випадкової величини *X* розкидані навколо середнього значення .

Неперервна випадкова величина *X* має *рівномірний розподіл* на відрізку , якщо її густина імовірності має вигляд:



Інтегральна функція розподілу:



На рис. 2 схематично показано густину імовірності та інтегральну функцію розподілу для рівномірно розподіленої випадкової величини *X*.

|  |  |
| --- | --- |
| a) | b) |

Рис. 2. Графічне зображення рівномірно розподіленої випадкової величини *X.*

Для рівномірно розподіленої випадкової величини *X* легко обчислити її числові характеристики







Коли неперервна випадкова величина *X* має рівномірний розподіл на відрізку , то це записують так: . Якщо , тобто , то такий неперервний рівномірний розподіл називають *стандартним*. Для стандартного рівномірного розподілу числові характеристики:

, , 

**Має місце твердження: якщо випадкова величина , а випадкова величина , то . Тобто, маючи генератор випадкових чисел, рівномірно розподілених на інтервалі [0,1], можна легко побудувати генератор випадкових чисел, рівномірно розподілених на заданому інтервалі .**

Дискретна випадкова величина *X* має *дискретний рівномірний розподіл* на відрізку , якщо вона на цьому відрізку приймає скінченне число значень з однаковими ймовірностями .

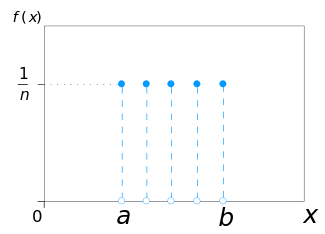
[](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Uniform_discrete_pmf_svg.svg)

Рис. 3. Густина ймовірності дискретної випадкової величини з рівномірним розподілом

Числові характеристики дискретної випадкової величини з рівномірним розподілом:







Простим прикладом дискретного випадкового процесу з рівномірним розподілом є підкидання монетки, або кидання кубика.

Нехай у нас є гральний кубик. Випадіння кожної з його граней є *рівноймовірною* подією, і така ймовірність, зрозуміло, є .

Тоді *математичне сподівання* при підкиданні кубика:

;

*середній квадрат*

;

*дисперсія:*



*середньоквадратчичне відхилення:*



Розглянемо випадкову величину *X*, яка є результатом експерименту з багатократного підкидання кубика. Нехай у результаті експерименту отримана скінченна послідовність {*xi*}, *i*=1,2,…,*N* змодельованих значень випадкової величини *X*. Таку скінченну послідовність називають *вибіркою* з випадкового процесу.

Нехай у вибірці кожне число *k*=1,2,3,4,5,6 з’являється  разів. Уведемо частоту випадання числа *k*:

.

Якщо повторити ще раз ту саму кількість *N* кидань, то отримаємо, взагалі кажучи, інше значення  і . Але при **.**

Для вибірки вводяться поняття *вибіркового математичного сподівання* , вибіркового *середнього квадрату* , *вибіркової дисперсії*  і *вибіркового середньоквадратичного відхилення* :

,



.



Значення , ,  при відносно велики х *N*, можна прийняти в якості оцінок математичного сподівання , дисперсії  і середньоквадратичного відхилення  величини *X*, тобто, , , . Наближені рівності стають точними в межі, коли *N*→¥.

**Завдання**

1. Згенерувати вибірку{*xi*}, *i*=1,2,…,*N* з цілих випадкових чисел (варіант 1 – 1÷4; варіант 2 – 1÷6; варіант 3 – 1÷8; варіант 4 – 1÷12; варіант 5 – 1÷20 або інший запропонований викладачем варіант). Для цього використати генератор псевдовипадкових чисел обраної мови програмування.
2. Побудувати залежність частоти випадання *k*-го числа від номера *k*. Графік представити у вигляді стовпців (побудувати гістограму).
3. Обчислити для згенерованого масиву чисел вибіркове математичне сподівання , вибіркову дисперсію , . Порівняти отримані значення із теоретичними.
4. Виконати п.1 – п.3 для *N*=10, *N*=100, *N*=1000, *N*=10000.
5. Зобразити графічно залежності  та  від . Проаналізувати отримані результати.
6. Зробити висновки. Оформити звіт.